Unidad II: Fundamentos de la teoría de probabilidad

2.1 Teoría elemental de probabilidad

El Cálculo de Probabilidades se ocupa de estudiar ciertos experimentos que se denominan aleatorios, cuya característica fundamental es la incertidumbre del resultado, esto significa que es imposible predecir los resultados porque hay más de uno posible.

Son ejemplos de experimentos aleatorios: lanzar un dado cinco veces, los instantes de llegadas a un abarrote, etc.

El término de probabilidad es de uso común, así el ente televisivo, el cual nos dirá que es poco probable un cambio brusco de temperatura ó un periódico informará que es muy probable que el Real Madrid gane en su campo a Las Palmas.

Este tipo de información es insuficiente cuando se necesita un conocimiento más profundo de un fenómeno aleatorio, Supongamos que una compañía de seguros va a extender una póliza por seguro de vida a un cliente.

Este es el objetivo del Cálculo de Probabilidades, medir probabilidades relacionadas con cierto fenómeno aleatorio dado. Medir significa asignar a cada probabilidad un número determinado, esto nos permitiría obtener un conocimiento más preciso del fenómeno.

2.2 Probabilidad de Eventos: Definición de espacio muestral, definición de evento, simbología, unión, intersección, diagramas de Venn

Definición de Espacio muestral (E): es el conjunto de los diferentes resultados que pueden darse en un experimento aleatorio o cuando se realiza un experimento, que es cualquier proceso que produce un resultado o una observación, se van a obtener un conjunto de valores. A este conjunto de valores que puede tomar una variable se le denomina espacio muestral.

Por ejemplo: Si se tiene un dado cualquiera, el espacio muestral (EM) es EM={1,2,3,4,5,6}.

Experimento {Lanzar un dado}, E={1,2,3,4,5,6}

Experimento {Lanzar una moneda}, E={Cara, Cruz}

2.3 Probabilidad con Técnicas de Conteo: Axiomas, Teoremas

Los axiomas de probabilidad son las condiciones mínimas que deben verificarse para que una función definida sobre un conjunto de sucesos determine consistentemente sus probabilidades.

Fueron formulados por Kolmogórov en 1933. Los axiomas de la formulación moderna de la teoría de la probabilidad constituyen una base para deducir a partir de ellas un amplio número de resultados.

La letra P se utiliza para designar la probabilidad de un evento, siendo P(A) la probabilidad de ocurrencia de un evento A en un experimento.

AXIOMA 1

Si A es un evento de S, entonces la probabilidad del evento A es:

$0 \leq P(A) \leq 1$

Como no podemos obtener menos de cero éxitos ni más de n éxitos en n experimentos, la

probabilidad de cualquier evento A, se representa mediante un valor que puede variar de 0 a 1.

AXIOMA 2

Si dos eventos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de obtener A o B es igual a la probabilidad de obtener A más la probabilidad de obtener B.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Excluirse mutuamente quiere decir que A y B no pueden ocurrir simultáneamente en el mismo experimento. Así, la probabilidad de obtener águila o sol en la misma tirada de una moneda será

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A \cup B) = 1/2 + 1/2 = 1.$

En general podemos decir que la suma de las probabilidades de todos los posibles eventos

mutuamente excluyentes es igual a 1:

$P(A1) + P(A2) + P(A3) + ... + P(An) = 1$

AXIOMA 3

Si A es un evento cualquiera de un experimento aleatorio y A' es el complemento de A, entonces:

$P(A') = 1 - P(A)$

Es decir, la probabilidad de que el evento A no ocurra, es igual a 1 menos la probabilidad de que ocurra.

2.4 Probabilidad condicional: Dependiente, Independiente

Eventos Independientes

Dos o más eventos son independientes cuando la ocurrencia o no-ocurrencia de un evento no tiene efecto sobre la probabilidad de ocurrencia del otro evento (o eventos). Un caso típico de eventos independiente es el muestreo con reposición, es decir, una vez tomada la muestra se regresa de nuevo a la población donde se obtuvo.

Dos eventos, A y B, son independientes si la ocurrencia de uno no tiene que ver con la ocurrencia de otro.

Por definición, A es independiente de B si y sólo si:A y B, son independientes si la ocurrencia de uno no tiene que ver con la ocurrencia de otro.

Por definición, A es independiente de B si y sólo si:A es independiente de B si y sólo si:

(PnA)=P(A)P(B)

Eventos dependientes

Dos o más eventos serán dependientes cuando la ocurrencia o no-ocurrencia de uno de ellos afecta la probabilidad de ocurrencia del otro (o otros). Cuando tenemos este caso, empleamos entonces, el concepto de probabilidad condicional para denominar la probabilidad del evento relacionado. La expresión P (A|B) indica la probabilidad de ocurrencia del evento A sí el evento B ya ocurrió.

2.5 Ley multiplicativa

Al multiplicar la formula P(B/A) =P(A Ç B)/ P(A) por P(A); obtenemos la siguiente regla multiplicativa, esta es importante por que nos permite calcular la probabilidad de que ocurran dos eventos.

Teorema: si un experimento pueden ocurrir los eventos A y B, entonces P(A Ç B)= P(A) P(B/A). así la probabilidad de que ocurran A y B es igual a la probabilidad de que ocurra A multiplicada por la probabilidad de que ocurra B, dado que ocurre A.

Ø Si los eventos A y B son dependientes:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

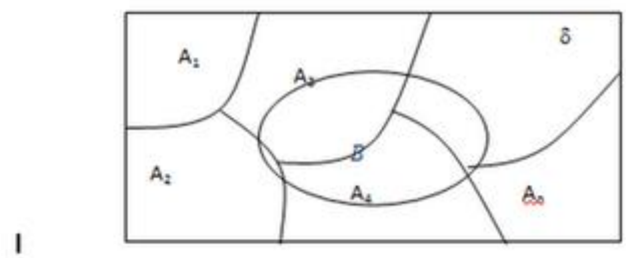
Ø Si los eventos A y B son independientes:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

2.6 Eventos independientes: Regla de Bayes

Sea d un espacio muestral que está formado por los eventos A1, A2, A3,.....,An mutuamente excluyentes, luego,

d = A1ÈA2ÈA3È.....ÈAn



Luego si ocurre un evento B definido en d, observamos que;

B = dÇB = (A1ÈA2ÈA3È.....ÈAn)ÇB = (A1ÇB)È(A2ÇB)È(A3ÇB)È.....È(AnÇB)

Donde cada uno de los eventos AiÇB son eventos mutuamente excluyentes, por lo que

p(B) = p(A1ÇB) + p(A2ÇB) + p(A3ÇB) +......+ p(AnÇB)

y como la p(AiÇB) = p(Ai)p(B½Ai) , o sea que la probabilidad de que ocurra el evento Ai y el evento B es igual al teorema de la multiplicación para probabilidad condicional, luego;

p(B) = p(A1)p(B½A1) + p(A2)p(B½A2) + p(A3)p(B½A3) + p(An)p(B½An)

Si deseamos calcular la probabilidad de que ocurra un evento Ai dado que B ya ocurrió, entonces;

$$P(Ai \mid B) = \frac{p(Ai \cap B)}{p(B)} = \frac{p(Ai)p(B|Ai)}{p(A_1)p(B|A_1) + p(A_2)p(B|A_2) + \ldots + p(An)p(B|A_n)}$$

La expresión anterior es el teorema de Bayes, que como se observa es una simple probabilidad condicional.

2.7 Variable aleatoria

Se llama variable aleatoria a toda aplicación del espacio muestral en un subconjunto de los números reales:

Una variable aleatoria es un valor numérico que corresponde al resultado de un experimento aleatorio, como la suma de los puntos obtenidos al lanzar dos dados, el número de lanzamientos de un dado hasta que aparece el cuatro, el número de personas que suben en un determinado ascensor al mes, el tiempo de espera en la sala de un doctor...

Las variables aleatorias discretas son aquellas que pueden tomar solamente un número finito o un número infinito numerable de valores.

A este nivel, las únicas variables aleatorias que consideraremos son aquellas que toman un número finito de valores. Un ejemplo de este tipo de variable aleatoria seria el resultado de lanzar un dado.

Las variables aleatorias continuas son aquellas que pueden tomar cualquier valor en un intervalo de la recta real. Un ejemplo de este tipo de variable aleatoria seria la altura de una persona.

2.8 Variables aleatorias conjuntas

Definición

Sean X, Y: variables aleatorias discretas. Entonces su función de distribución de probabilidad conjunta es f(x,y)Esta función satisface las siguientes propiedades

1) $\forall x \forall y\ (f(x,y) \geq 0)$
2) $\sum_{x} \sum_{y} \mathbf{f(x,y) = 1}$
3) $P(X=x, Y=y) = f(x,y)$

También se puede definir la distribución de probabilidad acumulada conjunta:

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{s \leq x} \sum_{t \leq y} \mathbf{f(s,t)}, \ -\infty \leq x, y \leq \infty \ .$$

Caso continuo

Definición

Sean X, Y: dos variables aleatorias continuas, entonces su función de densidad conjuntaes f(x,y)

Esta función satisface las siguientes propiedades:

1) $f(x,y) \geq 0,\ x \in \Re,\ y \in \Re$
2) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f(x,y)dxdy = 1}$
3) $P(a \leq X \leq b,\ c \leq Y \leq d) = \int_{c}^{d} \int_{a}^{b} \mathbf{f(x,y)dxdy}$

2.9 Modelos analíticos de fenómenos aleatorios discretos

Toda distribución de probabilidad es generada por una variable aleatoria x, la que puede ser de dos tipos (discreto y continuo), en este caso únicamente vamos a ver la discreta:

Definición de variables aleatoria discreta

Variable aleatoria discreta (x). Se le denomina variable porque puede tomar diferentes valores, aleatoria, porque el valor tomado es totalmente al azar y discreta porque solo puede tomar valores enteros y un número finito de ellos.

Ejemplos:

X ---> variable que nos define el número de burbujas por envase de vidrio que son generadas en un proceso dado.

X ---> 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc., etc. Burbujas por envase.

X ---> Variable que nos define el número de productos defectuosos en un lote de 25productos.

X ---> 0, 1, 2, 3,....,25 productos defectuosos en el lote.

X ---> Variable que nos define el número de alumnos aprobados en la materia de probabilidad en un grupo de 40 alumnos.

X ---> 0, 1, 2, 3, 4, 5,....,40 alumnos aprobados en probabilidad.

Con los ejemplos anteriores nos damos cuenta claramente que los valores de la variable x siempre serán enteros, nunca fraccionarios.

Se dice que una Variable Aleatoria Discreta o Discontinua X, tiene un conjunto definido de valores X1, X2, X3,…,Xn con probabilidades respectivamente p1, p2, p3,…,pn. Es decir que solo puede tomar uno de los valores de este conjunto, entonces P1+P2+…+Pn=1.

En general, una variable aleatoria discreta X representa los resultados de un espacio muestral en forma tal que por P(X=x) se entenderá la probabilidad de que X tome el valor de x. De esta forma, al considerar los valores de una variable aleatoria es posible desarrollar una función matemática que asigne una probabilidad a cada realización x de la variable aleatoria x. Esta función matemática que asigne una probabilidad a cada realización recibe el nombre de función de probabilidad.

2.10 Modelos analíticos de fenómenos aleatorios continuos.

Conceptos de Variables Aleatorias discretas y continuas

Una variable aleatoria se define como una función que hace corresponder números reales a elementos del Espacio Muestral. Una variable aleatoria puede ser discreta o continua. Dependiendo del tipo de experimento o fenómeno podemos hablar de modelos de probabilidad, algunos de los cuales son muy comunes.

Sea x un Experimento, Ensayo o Fenómeno Aleatorio. Sea W el Espacio Muestral asociado al experimento x formado por todos los posibles resultados de la realización de dicho experimento. Se dice que X es una Variable Aleatoria, a una función tal que, para cada elemento w del espacio muestral W, le hace corresponder el elemento x del Espacio Rango   tal que x = X(w).

Una variable aleatoria puede ser Discreta o Continua.

A) Variable Aleatoria Discreta

En el caso discreto se define a p(x) como la función de probabilidad de X si

a) $p(x) \geq 0$

b)

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$